**Министерство образования Московской области**

**Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области**

**«Государственный гуманитарно-технологический университет»**

**Гуманитарно-педагогический колледж**



**Методические рекомендации**

**по подготовке студентов**

**к дифференцированному зачету**

по учебной дисциплине

ЕН.01. Математика

**Специальность среднего профессионального образования**

46.02.01. Документационное обеспечение управления и архивоведение

**(углубленная подготовка)**

**Форма обучения: заочная**

Орехово – Зуево

**2018**

**УДК 372.016:51**

**ББК 74.262.21**

**Методические рекомендации по подготовке студентов к дифференцированному зачету по учебной дисциплине ЕН.01. Математика**

Учебно-методическое пособие для студентов (заочная форма обучения) по специальности 46.02.01. Документационное обеспечение управления и архивоведение Ефимова Н.Б.

Печатается по решению предметно-цикловой комиссии преподавателей общеобразовательных дисциплин ГПК ГГТУ

**Протокол № 6 от 28.03.2018**

**Содержание**

Пояснительная записка 4

Критерии оценивания 4

Методические указания по решению практических

заданий:

1. Предел и непрерывность 5

2. Элементарные функции 14

3. Производная функции и ее приложения 27

4. Неопределенный интеграл 33

5. Определенный интеграл 40

6. Приложения определённых интегралов 42

Перечень рекомендуемых учебных изданий,

Интернет-ресурсов, дополнительной литературы 47

**Пояснительная записка**

Методическое пособие по изучению дисциплины «Математика» подготовлено для студентов заочного отделения специальности 46.02.01. Документационное обеспечение управления и архивоведение. Оно поможет студенту в межсессионный период самостоятельно подготовиться к дифференцированному зачету.

**Критерии оценивания:**

Дифференцированный зачет состоит из двух частей: тестовой и практической. Тестовая часть состоит из 15 теоретических вопросов по 1 баллу за каждый правильный ответ.

Практическая часть содержит 5 заданий, охватывающие все разделы программы на которые приходится 9 баллов. Баллы распределяются следующим образом:

Дифференцирование элементарных функций, правила дифференцирования – 1 балл;

Непосредственное интегрирование – 1 балл;

Вычисление пределов (раскрытие неопределенностей) – 2 балла;

Исследование функции с помощью производной или нахождение наибольшего (наименьшего) значения производной на промежутке – 2 балла;

Приложения определенного интеграла (вычисление площадей криволинейных фигур или объемов) – 3 балла.

Максимальное количество баллов - 24 балла.

**«5»** - 95% - 100% - 23 – 24 балла

**«4»** - 94% - 85% - 21 - 22 балла

**«3»** - 60% - 84% - 14 - 20 балла

**«2»** - менее 60% - менее 14 баллов.

Основная часть пособия «Образцы решения практических заданий и справочные материалы» представляет собой краткое изложение теоретических вопросов программы: определения, теоремы, свойства, формулы, описание методов решения, содержащихся в тестовой части и необходимых для решения практических заданий, а также образцы решения основных практических заданий, содержащихся в практической части. Кроме этого дан образец тестовой части дифференцированного зачета.

Курс учебной дисциплины Математика ЕН.01 специальности 46.02.01 содержит следующие разделы:

|  |
| --- |
| Раздел 1. Предел и непрерывность |
| Раздел 2. Элементарные функции |
| Раздел 3 Производная функции и ее приложения |
| Раздел 4. Неопределенный интеграл |
| Раздел 5. Определенный интеграл. |
| Тема 6. Приложения определённых интегралов |

**В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен** **уметь:**

* решать задачи на отыскание производной сложной функции, производных второго и высших порядков;
* применять основные методы интегрирования при решении задач;
* применять методы математического анализа при решении задач прикладного характера, в том числе профессиональной направленности

**В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен** **знать:**

* основные понятия и методы математического анализа;
* основные численные методы решения прикладных задач;

**Методические указания по решению практических заданий:**

**Раздел 1. Предел и непрерывность**

**1.1. Определение предела функции**

Одним из основных в математике является понятие предела, связанное с поведением функции при изменении аргумента, т.е. как именно величина функции меняется при изменении аргумента.

Рассмотрим функцию  непрерывно изменяющегося аргумента. Пусть *х* стремится к некоторому числу  (). Введем понятие окрестности точки .

**Определение.**

−*окрестностью точки*  называется интервал , где −некоторое положительное число.

Если , то выполняется неравенство , или, что то же, . Выполнение последнего неравенства означает попадание точки *х* в −окрестность точки  (рис. 1).

0 δ δ

  *х* 

Рис. 1

**Определение.**

Число *А* называется *пределом функции в точке*  (или при ), если для любого положительного числа , найдется такое положительное число δ, зависящее от , что для всех  и, удовлетворяющих неравенству , выполняется неравенство .

Записывают:

.

Иными словами, числовые значения функции  будут заключены в произвольной −окрестности числа *А* при условии, что числовые значения аргумента *х* взяты в достаточно малой δ−окрестности числа  (исключая само число ). Из определения следует, что закон, по которому , безразличен: *х* может стремиться к  возрастая или убывая, или колеблясь около .

Точка  называется *предельной точкой*.

Поясним понятие предела геометрически. Если , то для всех точек , отстоящих от точки  не далее чем на δ, точки графика функции  лежат внутри полосы шириной 2, ограниченной прямыми  и  (рис. 2).

0

*А-ε*

*А*

*А+ε*

*х0-δ*

*х0*

*х0+δ*

*2ε*

*y=f(x)*

*x*

*y*

Рис. 2

**1.1.Основные теоремы о пределах**

Приведем без доказательства теоремы, которые облегчают нахождение пределов функций.

Пусть  и  − функции, для которых существуют пределы при  (или ), т.е.  и .

**Теорема 1.**

Если функция  постоянна, то ее предел равен ей самой:

.

**Теорема 2.**

Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов:

.

**Следствие 2.1**

Функция может иметь только один предел при .

**Теорема 3.**

Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

.

**Следствие 3.1.**

Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

.

**Следствие3.2.**

Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

.

**Теорема 4.**

Если предел функции  отличен от нуля, то предел обратной ей по величине функции  равен обратной величине предела данной функции:

.

**Теорема 5.**

Предел частного равен частному пределов, если предел знаменателя отличен от нуля:

.

**Теорема 6.**

Если для функции  существует , то

.

**1.11. Два замечательных предела**

Замечательными (вследствие большого числа их приложений) в математике называются пределы двух следующих функций, когда их аргумент *х* стремится к нулю:

 и ,

Первый замечательный предел 

Второй замечательный предел .

Число *е* иррациональное, его приближенное значение равно 2,72 (…). Число *е* служит основанием натуральных логарифмов () и играет важную роль в математике.

Дадим другое выражение для числа *е*. Полагая  (, т.к. ), будем иметь

.

Оба равенства называют вторым замечательным пределом. С помощью числа *е* удобно выражать многие пределы.

**1.12. Вычисление пределов функций. Раскрытие неопределенностей**

**Правило.** Для вычисления предела функции  в точке  или при  надо применить теоремы о пределах и подставить предельное значение аргумента.

Для всех основных элементарных функций в любой точке их области определения имеет место равенство

.

**Примеры**

Найти пределы функций:



2. ;

3. ;

4. ;

5. .

При вычислении пределов функций формальная подстановка вместо *х* предельного значения  часто приводит к неопределенным выражениям вида: , , , , , , .

Например,  или .

Выражения вида , , , , , ,  называются *неопределенностями*.

Вычисление предела функции в этих случаях называют *раскрытием неопределенности*.

Рассмотрим правила раскрытия таких неопределенностей.

**1.13. Неопределенность вида **

Если  и  при  (), то говорят, что их частное  представляет собой неопределенность вида .

**Правило.** Чтобы раскрыть неопределенность вида , заданную отношением двух многочленов, надо и числитель и знаменатель разделить на самую высокую входящую в них степень *х*.

Например, 

.

Рассмотрим дробно−рациональную функцию

 (),

представляющую собой отношение двух многочленов относительно *х* степеней *m* и *n* соответственно, и исследуем поведение этой функции при .

При нахождении предела данной функции при  могут иметь место три варианта ответа:

|  |  |
| --- | --- |
| 1. | , если ; |
| 2. | , если ; |
| 3. | , если . |

Из этого следует, что предел отношения двух многочленов при  во всех случаях равен пределу отношения их старших членов.

**Примеры**

Найти пределы функций:

1. ;

2. ;

3. .

Если требуется найти , где  и  − бесконечно малые функции при  (), т.е. , то в этом случае вычисление предела называют раскрытием неопределенности вида .

Рассмотрим возможные приемы раскрытия такой неопределенности.

**1.14. Выделение критического множителя**

**Правило.** Чтобы раскрыть неопределенность вида , заданную отношением двух многочленов, надо и в числителе и в знаменателе выделить критический множитель и сократить на него дробь.

**Примеры**

Найти пределы функций:

1. ;

2. ;





**Правило.** Чтобы раскрыть неопределенность вида , в которой числитель или знаменатель, или тот и другой иррациональны, надо:

− перенести иррациональность из числителя в знаменатель, или из знаменателя в числитель, домножив дробь на сопряженные выражения,

− либо сделать замену переменной.

**Замечание.**

Если под знаком предела делается замена переменной, то все величины, входящие под знак предела, должны быть выражены через эту новую переменную. Из равенства, выражающего зависимость между старой переменной и новой, должен быть определен предел новой переменной.

**Примеры**

Найти пределы функций:

1. 

;

2. 

;

3. 



;

4. 

.

**1.15. Применение первого замечательного пределы**

**Правило.** Для раскрытия неопределенности вида , содержащей тригонометрические выражения, используют первый замечательный предел:

 или ,

где  и .

**Примеры**

Найти пределы функций:

1. ;

2. ;

4. .

**1.16. Неопределенности вида  и **

Если  и  при  , то их разность  представляет собой неопределенность вида **.**

Если  и  при  , то их произведение  − это неопределенность вида **.**

**Правило.** Неопределенности вида  и  раскрываются путем их преобразования и сведения к неопределенностям вида  или .

**Примеры**

Найти пределы функций:





**1.17. Неопределенности вида** **, , **

Пусть функция имеет вид:

.

Если при  , , а , то имеем неопределенность вида ****. Для раскрытия этой неопределенности применяют второй замечательный предел:

; ;

или

; .

**Примеры**

Найти пределы функций:

1. ;

2. ;

3. ;



**Пример.** Исследовать функцию  на непрерывность в точках , .

**Решение:** для точки *x*1 = 3 имеем:

****

точка  – точка разрыва II рода

При  функция определена, следовательно  не является точкой разрыва, .

**Раздел 2. Элементарные функции**

**2.1. Общие сведения**

Если функция задана формулой и область определения не указана, то считают, что область определения состоит из всех значений независимой переменной, при которых эта формула имеет смысл. В этом случае говорят о ***естественной области определения*** функции. Например, область определения функции  состоит из всех чисел, кроме числа .

**Определение 1.** Пусть заданы некоторые непустые числовые множества и . Если каждому числу  ставится в соответствие по некоторому закону  единственное значение , то говорят, что на множестве  задана **функция**  или .

Переменную  называют независимой переменной (**аргументом**), а переменную  – зависимой переменной (**функцией от аргумента** ). Множество  – **областью определения функции**, а множество всех значений , таких, что , , называют **множеством значений** (**областью значений**) функции.

Для функции  приняты обозначения:  – область определения функции,  - множество значений функции,  – значение функции в точке .

Если  и , то функцию называют **числовой**.

Элементы множества  также называют **значениями аргумента**, а соответствующие им элементы  – **значениями функции**.

Таким образом, символ  обозначает число , которое в силу закона  соответствует значению . Например,  есть значение функции  в точке , если . Если же  не принадлежит  (), то говорят, что функция  **не определена** в точке .

Существуют функции, для которых всем значениям  соответствует одно и то же значение . В этом случае функции называют **константами**.

**Определение 2.** Функции **** и  называются **тождественно равными** на множестве , если они определены на данном множестве и для каждого  справедливо числовое равенство  (при этом пишут ).

Например: 1)  для всех ; 2) , .

**Определение 3. Графиком** функции называется множество всех точек, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.

**2.2. Способы задания функции**

1. **Аналитический способ:** функция задается в виде формулы , где переменная  – элемент множества значений аргумента, а переменная  – соответствующее значение функции.

2. **Табличный способ:** зависимость задается таблицей значений аргумента  и соответствующих им значений функции . Такие функции называют ***дискретными*** (заданными в отдельных точках).

3. **Графический способ:** функция задается c помощь своего графика.

|  |  |
| --- | --- |
| *рис.1* | Отметим, что не всякое множество точек координатной плоскости является графиком некоторой функции. Например, на кривой, изображенной на рисунке 2.1, значению  соответствуют три значения  (,  и ), и, следовательно, такое соответствие не является функцией. Множество точек координатной плоскости является графиком некоторой функции тогда и только тогда, когда любая прямая, параллельная оси , пересекается с указанным графиком не более чем в одной точке. |

4. **Алгоритмический способ:** значение функции вычисляется с помощью некоторого алгоритма, на вход которого подается значение аргумента, а на выходе получается значение функции.

5. **Словесный (описательный) способ:** при описательном способе зависимость между  и  выражается словесным описанием. Например,  есть наибольшее целое число, не превосходящее . Эта функция называется антье и обозначается . Пусть , тогда . Если , то . А при  получаем .

**2.3. Свойства функции. Монотонность функции**

**Определение 4.** Функция  называется **возрастающей** на данном числовом промежутке , если большему значению аргумента  соответствует большее значение функции , то есть для любых  и  из промежутка , таких, что , выполнено неравенство .

**Определение 5.** Функция  называется **убывающей** на данном числовом промежутке , если большему значению аргумента  соответствует меньшее значение функции , то есть для любых  и  из промежутка , таких, что , выполнено неравенство .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Функция, только возрастающая или только убывающая на данном числовом промежутке, называется ***монотонной*** на этом промежутке.  О монотонности функции можно судить по ее графику. Например, функция, график которой изображен на рисунке 2, возрастает при всех значениях . Функция, график которой изображен на рисунке 3 убывает на  и возрастает на промежутке . |
| *рис. 2.* | *рис. 3* |

**2.4. Четные и нечетные функции**

**Определение 6.** Функция  называется **четной**, если она обладает следующими двумя свойствами: 1) область определения этой функции симметрична относительно начала координат (то есть если точка  принадлежит области определения, то и точка  также принадлежит области определения); 2) для любого значения , принадлежащего области определения этой функции, выполняется равенство .

**Определение 7.** Функция  называется **нечетной**, если она обладает следующими двумя свойствами: 1) область определения этой функции симметрична относительно начала координат; 2) для любого значения , принадлежащего области определения этой функции, выполняется равенство .

**Замечание** График четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | График четной функции  изображен на рисунке 4. График нечетной функции  изображен на рисунке 5. Заметим, что не всякая функция является четной или нечетной.  Например, каждая из функций  , ,  не является ни четной, ни нечетной. |
| *рис. 4* | *рис. 5* |

Такие функции называют ***функциями общего вида***.

**2.5. Свойства четных и нечетных функций**

1. Если  и  – четные функции, заданные на одном и том же множестве , то функции , , , , , являются четными функциями на множестве .

2. Если  и  – нечетные функции, заданные на одном и том же множестве , то  и  являются нечетными функциями на множестве , а функция  – четной функцией на множестве ; если , то  является четной функцией на множестве .

**2.6. Периодические функции**

**Определение 8.** Функция  называется **периодической**, если существует такое число , что при любом  из области определения функции числа  и  также принадлежат этой области определения и выполняется равенство

.

В этом случае число  называется **периодом** функции .

**Замечание.** Если  – период функции, то , где , , также период функции. Следовательно, всякая периодическая функция имеет бесконечное множество периодов. На практике обычно рассматривают наименьший положительный период.

**Замечание.** Значения периодической функции повторяются через промежуток, равный периоду. Это обстоятельство используется при построении графиков.

**2.7. Промежутки знакопостоянства и нули функции**

**Определение 9.** Числовые промежутки, на которых функция сохраняет свой знак (то есть остается положительной или отрицательной), называются **промежутками знакопостоянства**.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | О промежутках знакопостоянства легко судить по ее графику. Рассмотрим, например, функцию  (рисунок 6).  Здесь  при ,  при . |
| рис. 6 | рис. 7 |

В первом случае график расположен выше оси абсцисс, во втором – ниже.

**Определение 9.** Значения аргумента , при которых , называются **корнями** (или **нулями**) функции.

Значения аргумента, при которых функция обращается в ноль, – это абсциссы точек пересечения графика с осью Ох (рисунок 7).

**2.8. Ограниченность функции**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| рис. 8 | рис. 9 |
|  |  |
| рис. 10 | рис. 11 |

**Определение 11.** Функция  называется **ограниченной** на множестве , если существует такое число , что неравенство  выполняется для всех  (рис. 8.)

**Определение 12.** Функция  называется **ограниченной сверху** на множестве , если существует такое число , что неравенство  выполняется для всех  (рис. 9.)

**Определение 13.** Функция  называется **ограниченной снизу** на множестве , если существует такое число , что неравенство  выполняется для всех  (рис.10)

**Определение 14.** Функция  называется **неограниченной** на множестве , если для любого числа  существует такое , что  (рис.11)

**2.9. Свойства ограниченных функций**

1. Если  и  определены и ограничены на одном и том же множестве , то функции , , ,  также ограничены на множестве .

2. Если  и  определены на множестве  и функция  ограничена на этом множестве, а функция  такова, что , то функция  ограничена на множестве .

**2.10. Основные элементарные функции**

Далее приведем наиболее важные свойства и графики основных элементарных функций.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Степенная функция** | | |
|  | 1. ;  2. , если  **-** нечетно; , если  **-** четно;  3. нечетная, если  **-** нечетно; четная, если  **-** четно;  4. возрастает на , если  **-** нечетно; убывает на , возрастает на , если  **-** четно;  5. непериодическая;  6. неограниченная. |  |
|  | 1. ;  2. , если  **-** нечетно; , если  **-** четно.  3. нечетная, если  **-** нечетно; четная, если  **-** четно;  4. убывает на  и на , если  **-** нечетно; возрастает на , убывает на , если  **-** четно;  5. непериодическая;  6.неограниченная. |  |
| , | 1. , если  **-** нечетно; , если  **-** четно;  2. , если  **-** нечетно; , если  **-** четно;  3. нечетная, если  **-** нечетно; общего вида, если  **-** четно;  4. возрастает на , если  **-** нечетно; возрастает на , если  **-** четно;  5. непериодическая;  6.нограниченная. |  |
| **Показательная функция** | | |
|  | 1. ;  2. ;  3.общего вида;  4. возрастает на , если ; убывает на , если ;  5. непериодическая;  6.нограниченная. |  |
| **Логарифмическая функция** | | |
|  | 1. ;  2. ;  3. общего вида;  4. возрастает на , если ; убывает на , если ;  5. непериодическая;  6.неограниченная. |  |
| **Тригонометрические функции** | | |
| 1. | 1. ;  2. ;  3. нечетная;  4. возрастает на , убывает на , ;  5. периодическая, с периодом ;  6. ограниченная. |  |
| 2. | 1. ;  2. ;  3. четная;  4. возрастает на ,  убывает на , ;  5. периодическая, с периодом ;  6. ограниченная. |  |
| 3**.** | 1.  , ;  2. ;  3. нечетная;  4. возрастает на  , ;  5. периодическая, с периодом ;  6.неограниченная. |  |
| 4. | 1. , ;  2. ;  3. нечетная;  4. возрастает на , ;  5. периодическая, с периодом ;  6.неограниченная. |  |
| **Обратные тригонометрические функции** | | |
| 1. | 1. ;  2. ;  3. нечетная;  4. возрастает на ;  5. непериодическая;  6. ограниченная |  |
| 2**.** | 1. ;  2. ;  3. общего вида;  4. убывает на ;  5. непериодическая;  6. ограниченная. |  |
| **3.** | 1. ;  2. ;  3. нечетная;  4. возрастает на ;  5. непериодическая;  6. ограниченная. |  |
| 4. | 1. ;  2. ;  3. общего вида;  4. убывает на ;  5. непериодическая;  6. ограниченная. |  |

**2.11. Элементарные функции. Классификация функций**

**Элементарные функции.**

Функции, которые могут быть получены из основных элементарных функций посредством арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление) и образования сложных функций, называются **элементарными функциями**.

Примером может являться функция .

Очень удобно **классификацию элементарных функций** представить в виде таблицы.

Элементарные функции

* Трансцендентные
* Алгебраические
  + Иррациональные
  + Рациональные
    - Целые рациональные
    - Дробные рациональные

Итак, по приведенной классификации элементарные функции подразделяются на **алгебраические** и **трансцендентные**.

**Алгебраические функции.**

**Алгебраическими** называют функции, составленные из букв и цифр, соединенных знаками действий сложение, умножение, вычитание, деление, возведение в целую степень и извлечение корня.

Другими словами: алгебраическими называют элементарные функции, которые могут быть получены из двух основных функций *f(x)=x и f(x)=1* при помощи любого числа последовательно выполненных алгебраических действий (сложение, умножение, вычитание, деление, возведение в целую степень, извлечение корня) и умножения на числовые коэффициенты.

Например, функция является алгебраической.

Алгебраические функции подразделяются на **рациональные** и **иррациональные**.

**Рациональные функции.**

**Рациональными** называются алгебраические функции, которые не содержат аргумент под знаком радикала (корня).

Рациональные функции разделяются на **целые рациональные функции (многочлены)** и **дробные рациональные (отношение многочленов)**.

Пример целой рациональной функции:. *y = *

Пример дробно-рациональной функции: .

ПРИМЕЧАНИЕ:

Рациональные функции могут содержать и иррациональные коэффициенты (главное, чтобы под знаком радикала не было аргумента функции). Например, y=- целая рациональная функция, а не иррациональная.

**Иррациональные функции.**

**Иррациональными** называются алгебраические функции, содержащие аргумент под знаком радикала (корня).

Примером может являться функция .

**Трансцендентные функции.**

**Трансцендентными** называют элементарные функции, которые не являются алгебраическими. (То есть, они образованы при помощи возведения в иррациональную степень, логарифмирования, с использованием тригонометрических и обратных тригонометрических операций).

К примеру, - трансцендентная функция.

**ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!**

Если вид элементарной функции можно упростить на всей области определения, то классификации подлежит именно упрощенная функция.

К примеру, - не иррациональная функция, а рациональная, так как 

 - не трансцендентная функция, а рациональная алгебраическая, так как .

**Определение 15.** Функция называется **явной**, если она задана формулой  (например, ). Функция называется **неявной**, если она задана уравнением , не разрешенным относительно зависимой переменной (например, ).

**Обратная функция**

Пусть  есть функция от независимой переменной , определенной на промежутке  с областью значений . Поставим в соответствие каждому  единственное значение , при котором . Тогда полученная функция , определенная на промежутке  с областью значений , называется **обратной**.

Так как обычно независимую переменную обозначают через , а функцию через , то функция, обратная к функции , примет вид . Обратную функцию так же обозначают . Например, для функции  обратной будет функция  или .

Обратная функция существует для любой строго монотонной функции.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

**Сложная функция**

Пусть функция  есть функция от переменной , определенная на множестве  с областью значений , а переменная  в свою очередь является функцией  от переменной  на множестве  с областью значений . Тогда заданная на множестве  функция  называется ***сложной*** функций (или композицией функций, или функцией от функции).

**Раздел 3 Производная функции и ее приложения**

**3.1. Основные теоретические сведения, формулы и методические указания по решению упражнений**

**3.11. Правила дифференцирования.**

Если – постоянное число и , – некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила дифференцирования:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1) . | 2) . | 3) . |
| 4) . | 5) . | 6) . |

**3.12. Таблица производных основных элементарных функций**

1. . 2. .

3. . 4. .

5. . 6. .

7. . 8. .

9. . 10..

11.. 12..

13.. 14..

15.. 16..

**Пример.** Найти производную функции .

**Решение.** Логарифмируя данную функцию, получаем:

.

Дифференцируем обе части последнего равенства по *х*:

.

Отсюда

.

Далее



Окончательно имеем:



**3.13. Схема полного исследования функции с помощью производной и построение ее графика.**

Для полного исследования функции и построения ее графика можно рекомендовать следующую примерную схему:

1. указать область определения;
2. найти точки разрыва функции, точки пересечения ее графика с осями координат;
3. установить наличие или отсутствие четности, нечетности, периодичности функции;
4. найти асимптоты графика функции;
5. исследовать функцию на монотонность и экстремум;
6. определить интервалы выпуклости и вогнутости;
7. построить график функции.

**3.2. Исследование функций с помощью производной.**

**Примеры исследования функций**

1. Исследовать функцию и построить график:

1. **Область определения и множество значений***: D(y)=R , E(y)=R*
2. **Непрерывность. Асимптоты**. Так как функция  является элементарной, то она непрерывна в каждой точке своей области определения, т.е. на всей числовой прямой. Выясним поведение функции на концах области определения.





Асимптот нет.

1. **Четность***.* Так как область определения функции симметрична относительно нуля, выясним, имеют ли место следующие равенства:

 или .



. Следовательно, функция является нечётной. Её график симметричен относительно начала координат.

1. **Периодичность функции.**

Функция не является периодической.

1. **Нули функции**





или 

(0;0); - точки пересечения графика с осями.

1. **Монотонность функции. Экстремумы функции**.







x=0 , 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x |  |  |  | 0 |  |  |  |
| y | + | 0 | \_ | 0 | \_ | 0 | + |
| y |  |  |  | 0 |  | - 0,007 |  |

Max Min

1. **Выпуклость. Точки перегиба.**



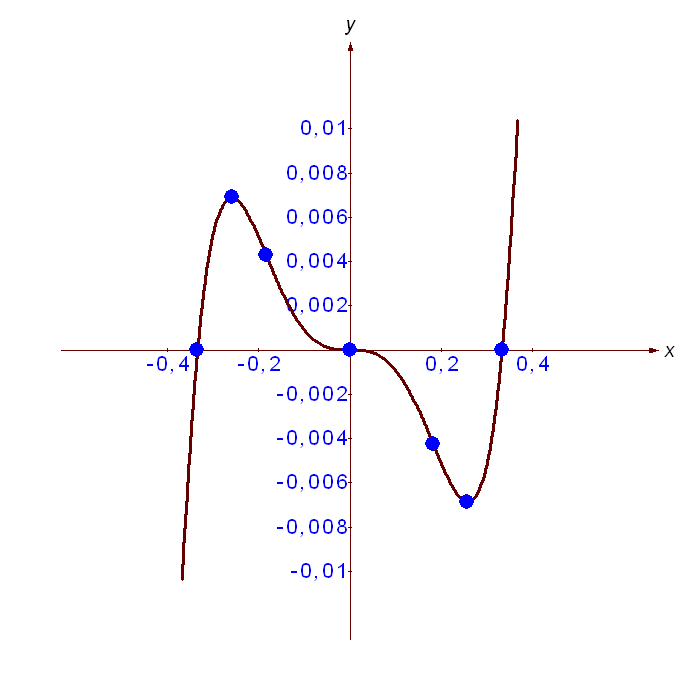


*x=0* или 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x |  |  |  | 0 |  |  |  |
|  | \_ | 0 | + | 0 | \_ | 0 | + |
| y |  | 0,004 |  | 0 |  | -0,004 |  |

т. перегиба т. перегиба т. перегиба

1. **Построим график**



2. Исследовать функцию  и построить график.

1) **Область определения и множество значений** 

2) ***Непрерывность. Асимптоты***. Данная функция определена при всех значениях , кроме . Так как функция  является элементарной, то она непрерывна в каждой точке своей области определения. Таким образом, единственной точкой разрыва служит точка . Для исследования характера разрыва найдем левый и правый пределы функции при .

.

.

Следовательно, функция  в точке  имеет бесконечный разрыв, т.е.  - точка разрыва II-го рода.  - *вертикальная асимптота*.

Найдем наклонные асимптоты.





Итак,  и . Следовательно, при  и при  график функции имеет *наклонную асимптоту* .

3) ***Четность***. Область определения не симметрична относительно нуля, поэтому функция не является ни четной, ни нечетной. Функция общего вида.

4) ***Функция не является периодической***.

5) ***Нули функции*.** y=0 , если x2-x=0; x(x-1)=0; x1=0 или x2=1

(0; 0), (1; 0) – точки пересечения графика с осями координат.

6) ***Монотонность. Точки экстремума****.*



, если 2x2+2x-1=0

2x2+2x-1=0

D=4+8=12

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x |  |  |  |  | |  | |  |  |
|  | + | 0 | \_ | - | \_ | | 0 | | + |
| y |  |  |  | - |  | | -0,13 | |  |

max min

7) ***Выпуклость. Точки перегиба.***

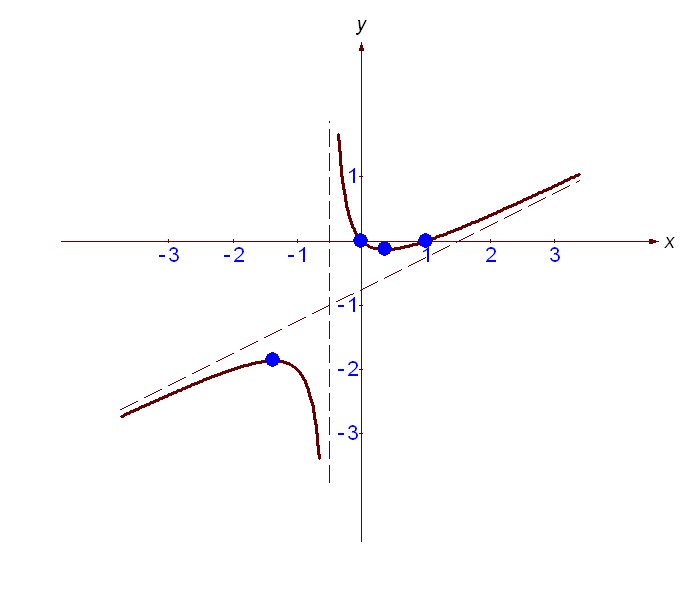


 не существует при 

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x |  |  |  |
|  | \_ | - | + |
| y |  | - |  |

Точек перегиба нет

1. **Построим график**



**Раздел 4. . Неопределенный интеграл**

**4.1. Определение первообразной**

Пусть *у = F(х)* имеет производную у' = ƒ(x), тогда ее дифференциал

*dy = ƒ(x)dx.*

Функция *F(х)* по отношению к ее дифференциалу *ƒ(x)dx* называется **первообразной**.

**Определение. 16.** **Первообразной функцией** для выражения *ƒ(x)dx* называется функция *F(x),* дифференциал которой равен *ƒ(x)dx*.

Однако дифференциалу функции соответствует не единственная первообразная, а множество их, причем они отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

Докажем это.

Пусть *F(x)* - первообразная для дифференциала *ƒ(x)dx*.

Тогда: *(F(х) + C)' = F(x)’ + C' = ƒ(х) + 0 = ƒ(х),* где *C = const*.

**Определение. 17.** Совокупность всех первообразных функций *F(х) + C* для дифференциала *ƒ(x)dx* называется **неопределенным интегралом** и обозначается *∫****f(x)dx.***

Таким образом,

***∫f(x)dx = F(x) + C,***

где *ƒ(x)dx* называется подынтегральным выражением, а *C* - произвольной постоянной интегрирования. Например:

***∫****2хdx = х2 + C,*

так как

*(х2 + C)' = 2х.*

Процесс нахождения первообразной функции называется **интегрированием**.

Интегрирование — это действие, обратное дифференцированию.

**4.2. Свойства неопределенного интеграла**

1) d**∫**f(x)dx = f(x)dx,

т. е. дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.

2) **∫**dF(x) = F(x) + с,

т. е. неопределенный интеграл от дифференциала функ­ции равен этой функции, сложенной с произвольной по­стоянной.

3) **∫**a · f(x)dx = a · **∫**f(х)dx,

где a = const, т. e. постоянную величину можно вынести за знак интеграла.

4) **∫**[f1(х) + f2(x) – f3(x)] dx = **∫**f1(x)dx + **∫**f2(x)dx - **∫**f3(x)dx,

т. e. интеграл суммы или разности функций равен сумме или разности интегралов.

**4.3. Формулы интегрирования**

Основные формулы интегрирования получаются обращением формул дифференцирования.

Заметим, что справедливость каждой формулы прове­ряется дифференцированием. Учащимся предлагается самостоятельно проверить справедливость этих формул.

4. *Таблица простейших интегралов*

1. . 2. .

3. . 4. .



5. . 6. .

7. . 8. .

9. . 10..

11.. 12..

**Задание**. Найти неопределенные интегралы. Результат проверить дифференцированием.

1.

Проверка:

*d(x5 - x4 + x3 - x + С) = (5x4 - 4x3 + 3x2 — 1)dx.*

2.

Сделать проверку самостоятельно.

3.

Сделать проверку самостоятельно.

 Более сложные задания:

а)

Используемый прием интегрирования называется подведением под знак дифференциала. Проверим результат дифференцированием.



б) В этом интеграле также используется подведение под знак дифференциала



Проверим результат дифференцированием.



в)

Для решения этого интеграла воспользуемся формулой интегрирования "по частям". Приведем формулу интегрирования по частям:

В этом интеграле распишем составляющие следующим образом:



Продифференцируем *u* и проинтегрируем *dv* чтобы мы могли применить формулу интегрирования по частям:











Подинтегральное выражение есть неправильная рациональная дробь. Необходимо привести ее к сумме правильных рациональных дробей, выполнив деление углом числитель на знаменатель.

Вернемся к исходному интегралу:





Проверим результат дифференцированием:



**4.4. Методы интегрирования**

**4.41. Интегрирование способом подстановки**

Рассмотрим один из сильнейших приемов интегрирования функций - метод замены переменной, или подстановки.: если

то

где *u (х)* — произвольная дифференцируемая функция от *х*.

Замена переменной производится с помощью подстановок двух видов:

1) *х = φ(t),* где t — новая переменная, а *φ(t)* непрерывно дифференцируемая функция. В этом случае формула замены переменной

(1)

Функцию φ(t)стараются выбирать таким образом, чтобы правая часть формулы (1) приобрела более удобный для интегрирования вид.

В полученном после интегрирования в правой части выражения надо перейти снова к аргументу х.

2) *t = ψ(х),* где *t* — новая переменная. В этом случае формула замены переменной

В полученном после интегрирования в правой части выражения надо перейти снова к аргументу *х*.

Например, необходимо вычислить следующие интегралы:

1)

Положим *1 + х = z.*

Продифференцируем это равенство:

*d(l + х) = dz*

*dx = dz*

Заменим в интеграле:

2.

Положим: *а+ bx= z;* *d(a + bx) = dz* ; *b·dx = dz*; *dx =*

Заменим:

3.

Замена: *1 - ex=z; d(1-ex)=dz; exdx=-dz*

**4.42. Интегрирование по частям**

Пусть u и v — дифференцируемые функции от х. Тог­да, как известно,

*d (uv) = udv + vdu,*

откуда следует

*udv = d (uv) — vdu.*

Интегрирование обеих частей этого равенства дает

*∫udv = ∫d(uv) - ∫vdu.*

Так как *∫d(uv) = uv* в силу обратности операций дифференцирования и интегрирования, то получаем

*∫udv = uv - ∫vdu.*

Это формула интегрирования по частям, позволяющая переходить от заданного интеграла *∫udv* к интегралу *∫vdu*; последний при удачном разбиении подынтегрального выражения на *u* и *dv* может оказаться более простым, чем первоначальный.

Эта формула часто применяется, когда подынтегральной функцией является:

* логарифмическая или обратная тригонометрическая функция;
* произведение каждой из этих функций на алгебраическую;
* произведение, содержащее алгебраические, тригонометрические, показательные функции,
* и в некоторых других случаях.

Для интегралов вида *∫lnxdx, ∫arctgxdx, ∫arcsinxdx* за *u* принимается подынтегральная функция, a *dv = dx*. Это дает, например, для первого интеграла следующее:

*u = In х; dv = dx; du= ; v=x.*

Поэтому установленная формула позволяет записать

Теперь уже получается результат:

Аналогично отыскиваются второй и третий интегралы.

Найдем *∫arcsinxdx*. Полагаем *u* *= arcsin х*, a *dv = dx*, тогда *du =*  и *v = x.*

Поэтому

Заметим, что к вновь записанному интегралу применяется подстановка 1 *- х2 = z, которая дает .*

Поэтому можно записать

Когда интегрирование по частям применяется к подынтегральной функции, имеющей вид произведения, то выбор множителей и *dv* должен соответствовать цели перехода к интегралу *∫vdu*, более простому, чем заданный интеграл ∫udv, причем множитель *dv*, всегда включающий *dx*, должен быть легко интегрируемым.

Это достигается, например, тем, что для интегралов вида

(1-я группа)

за u принимается многочлен *Р (х),* а для интегралов вида

(2-я группа)

за *u* принимается *In х, arctg x, arcsin х.*

**Например,** найдем *∫(2х-5)e-3xdx.*

Принимаем

*u = Зх - 5 и dv = е – 3xdx,*

тогда

*du = 2dx и v =*

Отсюда находим

**Задания для самостоятельной работы**

Найдите интегралы:

1) *∫xarctgxdx*, здесь надо взять *u = arctg х, dv = xdx*

Ответ.

2) , здесь надо взять *u = х2 - Зх +2;* *dv = cos5xdx*

Ответ.

3) , здесь надо взять *u* = , *dv = dx*

Ответ.

4) ∫*xlnxdx =* Ответ.

5*) ∫xe-2xdx* = Ответ.

6) *∫xcos2xdx =* Ответ.

7) Ответ.

**Раздел 5. Определенный интеграл.**

**5.1. Определение определённого интеграла**

Приращение *F(b) – F(a)* любой из первообразных функций *F(x) + С* при изменении аргумента от *х = а* до *х = b* называется **определенным интегралом**, и обозначается:

Таким образом:

*a* — нижний предел интеграла,

*b* — верхний предел интеграла.

Для вычисления определенного интеграла нужно найти соответствующий неопределенный интеграл, в полученное его выражение подставить вместо *х* сначала верхний, а затем нижний пределы определенного интеграла и из первого результата подстановки вычесть второй.

**Примеры**:

1.

2.

**4.2. Свойства определенного интеграла**

1. , где *C = const*

2.

3.

**Пример**:

****

**Задание**. Вычислить по формуле Ньютона-Лейбница определенный интеграл.

Перейдем к замене переменных в определенном интеграле:





**Раздел 6. Приложения определённого интегралов**

**6.1. Геометрический смысл определенного интеграла**

Площадь фигуры, ограниченной кривой *у = ƒ(x),* где *ƒ(x)> 0*, осью *ОХ* и двумя прямыми *х= a* и *х = b* (рис. 1), выражается определенным интегралом:

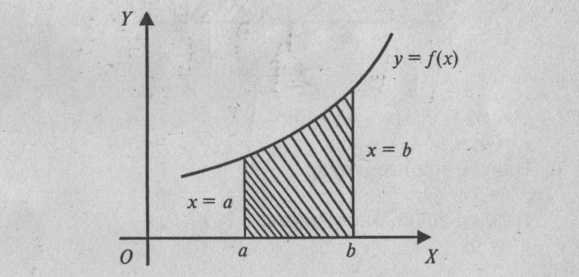


Рис.1

**Примеры**:

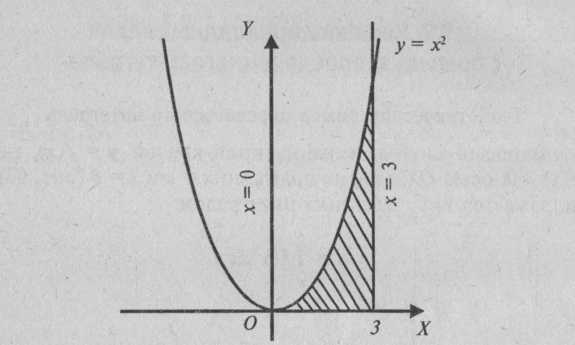
1) Определить площадь S фигуры, заключенной между ветвью кривой *у = х2*, осью *ОХ* и прямыми *х = 0, х = 3* (рис. 2).

Рис. 2

2) Найти площадь *S* фигуры, заключенной между осью *ОХ* и кривой *у = х2 - 4х* (рис. 3).

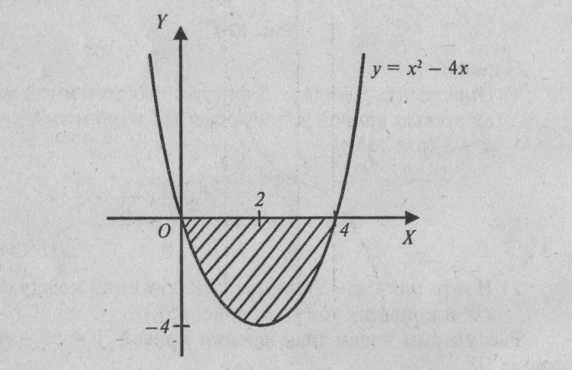
Рассмотрим точки пересечения кривой *у = х2 - 4х* с осью *ОХ*:

*у = 0*

*х2 - 4х = 0; х(х - 4) = 0*

*х1 = 0; х2 = 4.*

Найдем производную:

*у' = 2х - 4.*

Найдем точки экстремума:

*y' = 0;*

*2х - 4 = 0*

*х = 2*

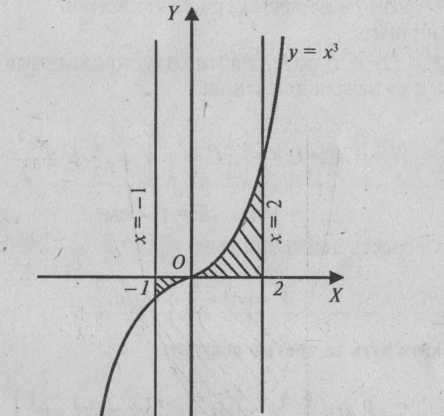
*у " = 2 > 0*

*х = 2 – точка min* Рис. 3

*y(2) = -4.*

Искомая площадь ограничена сверху *ОХ*, снизу *у = х2 - 4х*, слева *х = 0*, справа *х = 4*.

Так как *у < 0*, то

3) Найти площадь фигуры, заключенной между *y = х3, х = -1, х = 2* и осью *ОХ* (рис. 4):

у = х3

у = 0→х = 0;

у' = Зх2

у' = 0 →х = 0

у" = 6х

у"(0) = 0

y"(-1) = - 6

y"(1) = 6

y" меняет знак →(0, 0) — точка перегиба.

Искомая площадь состоит из двух частей;

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой  и прямой . Сделать чертеж.

Решение. Площадь области S, ограниченной снизу функцией g(x), сверху- функцией f(x), слева - вертикальной прямой , справа - вертикальной прямой равна  равна определенному интегралу:



Так как мы пока не знаем, какая же из функций является большей на отрезке , построим чертеж. Точки ,  являются абсциссами точек пересечения графиков этих двух функций.

Как видно из построения парабола лежит выше прямой на отрезке, поэтому:



рис. 5





Абсциссы точек пересечения суть соответственно -6 и -1. Эти значения мы также можем получить решив в системе уравнения двух кривых

|  |  |
| --- | --- |
| { |  |
|  |







По теореме Виета имеем: , . Теперь осталось только применить формулу вычисления площади криволинейной области:

*-1*



*-6*



**6.2. Механический смысл определённого интеграла**

Пусть S - путь, пройденный за время t со скоростью V:

S = V · t,

где V = ƒ(t) при неравномерном движении.

Например:

1) V= (2t2+ t) см/с. Найти путь, пройденный телом за 6 с от начала движения:

2) Скорость движения тела

см/с.

Найти путь за третью секунду:

**Задания для самостоятельной работы**

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1. *xy = -6*

*у - х = 7*

Ответ.

2. *у = еx*

*у = 0*

*х = -1*

*x = 1*

Ответ.

3. *у = lnx*

*у = 0*

*х = е*

Ответ. *S =1.*

4. Найти путь, пройденный телом за 3 с от начала движения:

*V(t) = Зt2 + 2t (см/с)*

Ответ. S = 36 см.

**6.2. Вычисление объема тела вращения с помощью определенного интеграла**

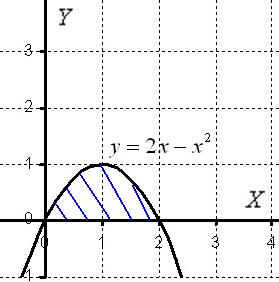
**Вычисление объем тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси *ОХ***

Пример 1

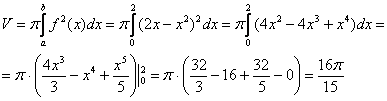
Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями http://www.mathprofi.ru/h/obyem_tela_vrashenija_clip_image006.gif,http://www.mathprofi.ru/h/obyem_tela_vrashenija_clip_image008.gif вокруг оси http://www.mathprofi.ru/h/obyem_tela_vrashenija_clip_image002_0001.gif.

**Решение:**

1. Построим чертеж плоской фигуры, ограниченную линиями: http://www.mathprofi.ru/h/obyem_tela_vrashenija_clip_image006_0000.gif, http://www.mathprofi.ru/h/obyem_tela_vrashenija_clip_image008_0001.gif



2. Заштрихованная криволинейная трапеция будет вращаться вокруг оси ОХ. Получим параболоид вращения, объем которого вычисляется с помощью определенного интеграла по формуле: http://www.mathprofi.ru/h/obyem_tela_vrashenija_clip_image015.gif

Вычислим объем тела вращения, используя данную формулу:

Ответ**:** http://www.mathprofi.ru/h/obyem_tela_vrashenija_clip_image027.gif

**Примерный вариант дифференцированного зачета по учебной дисциплине «Математика ЕН.01.» (тестовая часть)**

1. Продолжите предложение: Предел произведения конечного числа функций равен

1) произведению значений пределов каждой функции в отдельности;

2) сумме пределов каждой функции в отдельности;

3) сумме значений производных этих функций;

4) не существует.

2. Найдите предел функции

1) -2;

2) 1;

3) 0;

4) .

3. Второй замечательный предел имеет вид:

1)

2)

3)

4)

4. Найдите предел функции .

1) *е*

2*) е2*

3) *е0,5*

4) *еn*

5. Действие нахождения первообразной функции называется

1) дифференцирование;

2) потенцирование;

3) логарифмирование;

4) интегрирование.

6. Укажите верную формулу

1) ;

2) ;

3) ;

4) .

7. Производная от постоянной функции равна

1) 1;

2) 0;

3) значению постоянной;

4) ∞.

8. Найти для функции 

1) 0,5;

2) 0,75;

3) 0,25;

4) 1,5.

9. Тело движется прямолинейно по закону S=3t2-t+2. Чему равно ускорение в конце 5 секунды?

1) 6 ;

2) 1;

3) 0;

4) другой ответ.

10. Производная функции *y= cos24x* равна

1) -2*sin4x;*

2) *2cos4x*;

3) *2cos4x sin4x;*

4) *-4sin8x.*

11. Найти промежутки убывания функции 

1); (-∞;0); (2;+∞)

2) ;

3) ;

4) .

12. Если при переходе через критическую точку меняет знак с «-» на «+», то это точка

1)минимума;

2) перегиба;

3) максимума;

4) разрыва.

13. Найдите интеграл :

1);

2) ;

3) ;

4) .

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями *y=x3; y=0; x=2;*

1) 8; 2) 0; 3) 4; 4) другой ответ.

15. Вы числить интеграл

1) ln2;

2) 0;

3) 1;

4) другой ответ

**Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы**

**Основная литература:**

1. Пехлецкий И.Д. Математика. Учебник СПО, математические и естественно-научные дисциплины. М., издательский центр «Академия», 2013г.

**Дополнительная литература:**

1. Богомолов Н.В. Математика. Учебник для СПО. М. «Дрофа», 2009.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике для СПО. М. «Дрофа», 2009.
3. Богомолов Н.В., Сергиенко Л.Ю. Сборник дидактических заданий по математике для СПО. М. «Дрофа», 2009.
4. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. М., «Айрис Пресс», 2010. (Электронная версия)
5. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов. М. ЮНИТИ, 2008.(Электронная версия)

**Интернет-ресурсы.**

http://www.zaba.ru. Математические олимпиады и олимпиадные задачи;

http://comp-science.narod.ru. учебно – методические материалы по информатике и математике;

http://www.mccme.ru. МЦНМО: база данных задач с решениями, математические игры.

http://www.lib.mexmat.ru/ электронная библиотека мехмета МГУ

http://www.allbest/ru/mat.htm электронные библиотеки

http://www.video-repetitor.ru/ видеоуроки по ЕГЭ

http://kazik.ru/atematika математические игры

http://www.pm298.ru/reshenie/menu.php Прикладная математика, примеры решения задач по высшей математике

www.rusedu.ru. Основные понятия теории вероятностей: Архив учебных программ (презентации)

www.ruccme.ru/mmmf-lectres/books Популярные лекции по математике

www.college/ru Открытый колледж. Широкий спектр ресурсов, в том числе дистанционного обучения

www.school.edu.ru/dok

[www.edu.ru/db/portal/sred/](http://www.edu.ru/db/portal/sred/)

Газета «Математика» издательского дома «Первое сентября»

<http://www.mat>.september.ru

Математика в Открытом колледже

http://www.mathematics.ru

Математика: Консультационный центр преподавателей и выпускников МГУ <http://school.msu.ru>

Образовательный математический сайт Exponenta.m htto://www.exponenta.ru

Общероссийский математический портал Math-Net.Ru <http://www.mathnet.ru>

Портал Alhnath.ni - вся математика в одном месте

http://www.alhnath.ru

Виртуальная школа юного математика

<http://math.ournet.md>

Вся элементарная математика: Средняя математическая интернет – школа http ://[www.bvmath.nct](http://www.bvmath.nct)

Геометрический портал http://www.neive.bv.ru

Графики функций http.// graphfunk.narod.ru